70

Segundo Examen Parcial

Gráficas por Computadora

Profesor: Mario Martínez Molina.
Fecha: 9 de marzo de 2018

Alumno: Matrícula:

Preguntas

1. (5 pts) ¿Qué es la división de la perspectiva (perspective divide)?
2. (5 pts) ¿Por qué es necesario usar coordenadas homogéneas para representar una transformación de traslación?
3. (10 pts) Mencione y explique las propiedades deseables en una familia de splines.

Ejercicios

1. (20 pts) Calcule las coordenadas *top, bottom, left,* y *right* de un frustum determinado por un ángulo α, coordenadas $near=-n$ y $far=-f$. Considere que el frustum es simétrico.
2. (20 pts) En una proyección ortográfica no hay efecto de perspectiva. En consecuencia, el volumen visible para una transformación de este tipo está determinado por un rectángulo en el plano $x-y$, así como las coordenadas $-near$ y $-far$ en la dirección $-z$. Determine la matriz de transformación para una proyección ortográfica.
3. (20 pts) Demuestre que para una curva de Bézier se tiene que:
   a) $B''(0)=6(P_1-2P_2+P_3)$
   b) $B''(1)=6(P_2-2P_3+P_4)$
4. (20 pts) Una curva de Hermite está especificada por la matriz de geometría $\boldsymbol{G_H}=[P_1 \quad P_4 \quad T_1 \quad T_4]$ y la matriz base $\boldsymbol{M_H}$. Por otra parte una curva de Bézier está especificada por la matriz de geometría $\boldsymbol{G_B}=[P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4]$ y la matriz base $\boldsymbol{M_B}$. Demuestre que si ambas curvas son equivalentes, entonces se tiene que:

$$\boldsymbol{G_B}=\boldsymbol{G_H}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

• El alumno no comprende los fundamentos teoricos sobre transformaciones entre sistemas coordenados.

1- la división de perspectiva se da cuando se pasa del espacio de vista al espacio de clipping, entonces lo objetos que no son visibles del espacio de vista se proyectan en este espacio.

0 pts

2- Con coordenadas homogeneas se puede representar una transformación y una traslación en una sola Matriz de transformación pues en elas se manejan vectores de posición y dirección para respresentar esta traslación

5 pts

3- En una familia de spline se desean las sig. caract.

Composición simple: los spline deben estar formados por segmentos de curvas de orden 3

Interpolación: asegura que el spline va a pasar por todos los puntos

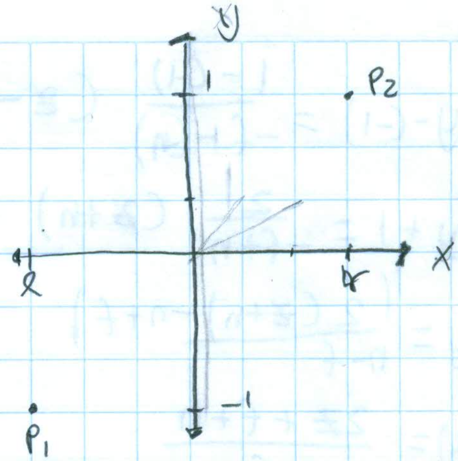
10 pts

Control local: asegura que si se cambia algún vertice dentro del spline entonces solo se modificara a los vertices vecinos a este.

Continuidad C^2: la derivada de orden 2 en cada punto de unión tienen la misma magnitud y dirección

2-

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



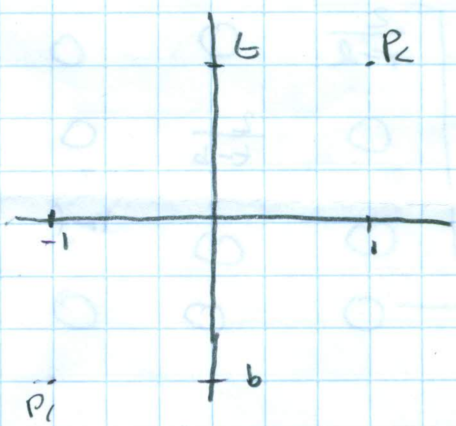
$$y - (-1) = \frac{1-(-1)}{r-l}(x - l)$$

$$y + 1 = \frac{2}{r-l}(x-l)$$

$$y = \frac{2}{r-l}(x-l) - 1$$

$$y = \frac{2(x-l)+l+r}{r-l} = \frac{2x-l-r}{r-l} = \frac{2x}{r-l} - \frac{(r+l)}{r-l}$$

$$y = \frac{2P_x}{r-l} - \frac{(r+l)}{r-l} = N_x$$



$$y - (b) = \frac{t-b}{1-(-1)}(x-(-1))$$

$$y - b = \frac{t-b}{2}(x+1)$$

$$x = \frac{2(y-b)}{t-b} - 1$$

$$x = \frac{2(y-b)-t+b}{t-b} = \frac{2y-b-t}{t-b}$$

$$x = \frac{2y}{t-b} - \frac{t+b}{t-b} = \frac{2P_y}{t-b} - \frac{t+b}{t-b} = N_y$$

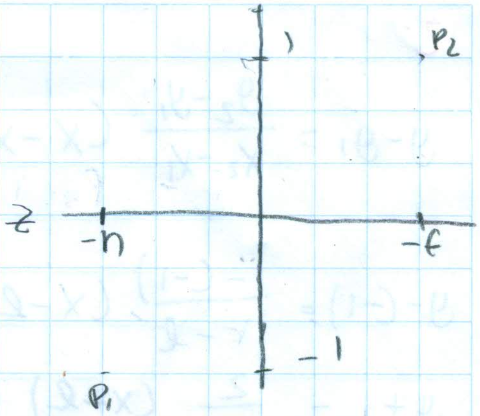
$$y-(-1) = \frac{1-(-1)}{-f-(-n)}\,(z-(-n))$$

$$y+1 = \frac{2}{-f+n}\,(z+n)$$

$$y = \frac{(2(z+n)-n+f)}{n-f}$$

$$y = \frac{2z+f+n}{n-f}$$

$$y = \frac{2P_z}{n-f} + \frac{f+n}{n-f} = N_z$$



20 pts

$$(-N_x, -N_y, -N_z, 1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{(r+l)}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{(t+b)}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & \frac{f+n}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3-

a) $B = [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4] \, M_B \, [1 \; t \; t^2 \; t^3]^T$

$B' = [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4] \, M_B \, [0 \; 1 \; 2t \; 3t^2]^T$

$B'' = [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4] \, M_B \, [0 \; 0 \; 2 \; 6t]^T$

$$B''(0) = [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6t \end{bmatrix}$$

$$B''(0) = [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4] \begin{bmatrix} 6 - 6t \\ -12 \;\; 18t \\ 6 \;\; -18t \\ 6t \end{bmatrix}$$

20 pts

$$B''(0) = [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4] \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B''(0) = 6P_1 - 12P_2 + 6P_3 = 6(P_1 - 2P_2 + P_3)$$

$$B''(1) = [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix} = 6P_2 - 12P_3 + 6P_4$$

$$= 6(P_2 - 2P_3 + P_4)$$

4:

$P_1 = P$

$P_2 = P + \frac{1}{3} T_1$

$P_3 = P_4 - \frac{1}{3} T_2 = Q - 3T_2$

$P_4 = Q$

$T_1 = \frac{1}{3}(P_2 - P_1)$

$T_2 = \frac{1}{3}\cancel{(P_4 - P_3)}$

15 pts

$$[P_1 \quad Q \quad T_1 \quad T_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} = G_B$$

$G_H = [P_1 \quad P_4 \quad T_1 \quad T_4]$

$$B'(0) = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$= [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4] \begin{bmatrix} -3 + 6t - 3t^2 \\ 3 - 12 + 9t^2 \\ 0 + 6t - 9t^2 \\ -3t^2 \end{bmatrix}$$

$$B'(0) = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4] \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -3P_1 + 3P_2 = 3(P_1 + P_2) = T_1$$

$$B'(1) = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3(P_4 - P_3) = T_2$$

25

Segundo Examen Parcial

Gráficas por Computadora

Profesor: Mario Martínez Molina.
Fecha: 9 de marzo de 2018

Alumno: Matrícula:

Preguntas

1. (5 pts) ¿Qué es la división de la perspectiva (perspective divide)? es hacer que solo ~~se muestre~~ en la camara, una porcion del espacio tridimensional. Ø pts
2. (5 pts) ¿Por qué es necesario usar coordenadas homogéneas para representar una transformación de traslación? Para poderle aplicar las respectivas operaciones Ø pts
3. (10 pts) Mencione y explique las propiedades deseables en una familia de splines.
   continuidad 2; si se modifica un punto, solo se modifiquen los segmentos cercanos; el inicio del siguiente spline debe coincidir con el fin del anterior spline, 5 pts

Ejercicios

1. (20 pts) Calcule las coordenadas *top, bottom, left,* y *right* de un frustum determinado por un ángulo α, coordenadas $near=-n$ y $far=-f$. Considere que el frustum es simétrico.
2. (20 pts) En una proyección ortográfica no hay efecto de perspectiva. En consecuencia, el volumen visible para una transformación de este tipo está determinado por un rectángulo en el plano $x-y$, así como las coordenadas $-near$ y $-far$ en la dirección $-z$. Determine la matriz de transformación para una proyección ortográfica.
3. (20 pts) Demuestre que para una curva de Bézier se tiene que:

   a) $B''(0)=6(P_1-2P_2+P_3)$

   b) $B''(1)=6(P_2-2P_3+P_4)$
4. (20 pts) Una curva de Hermite está especificada por la matriz de geometría $\boldsymbol{G_H}=[P_1 \quad P_4 \quad T_1 \quad T_4]$ y la matriz base $\boldsymbol{M_H}$. Por otra parte una curva de Bézier está especificada por la matriz de geometría $\boldsymbol{G_B}=[P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4]$ y la matriz base $\boldsymbol{M_B}$. Demuestre que si ambas curvas son equivalentes, entonces se tiene que:

$$\boldsymbol{G_B}=\boldsymbol{G_H}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

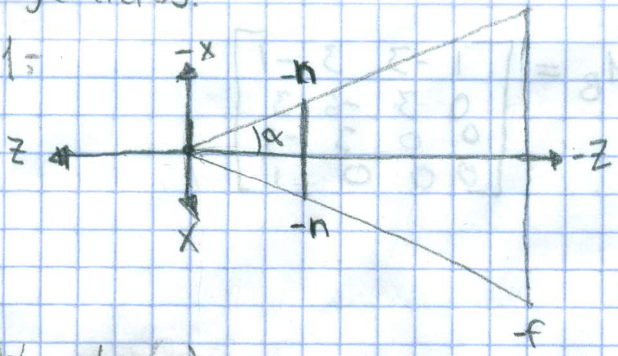
- El alumno no posee los conocimientos necesarios sobre transformaciones lineales.
- El alumno no demostró poseer los conocimientos sobre transformaciones afines.
- El alumno no utilizó los fundamentos teóricos sobre curvas y superficies paramétricas.

DIA	MES	AÑO	FOLIO

Ejercicios.

20 pts

1.-

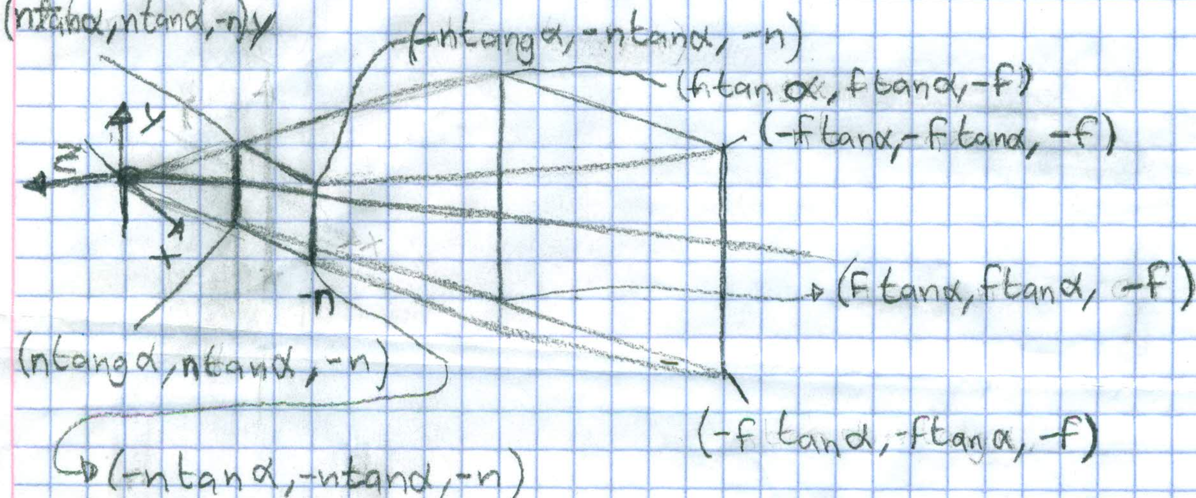


$\tan \alpha = \frac{x}{-n}$

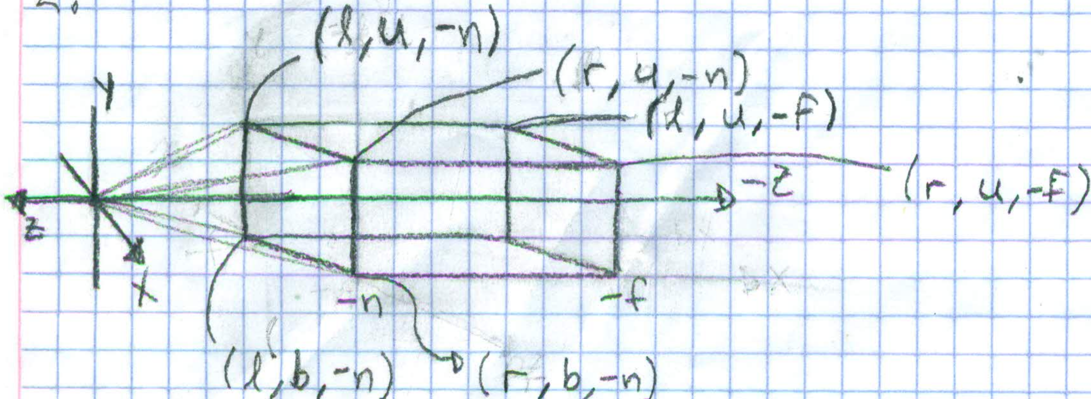
$\pm x = -n \tan \alpha$

como es simétrica

$x = y$



2.-



4.-

$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segundo Examen Parcial

100

Gráficas por Computadora

Profesor: Mario Martínez Molina.
Fecha: 9 de marzo de 2018

Alumno: Matrícula:

Preguntas

1. (5 pts) ¿Qué es la división de la perspectiva (perspective divide)?
2. (5 pts) ¿Por qué es necesario usar coordenadas homogéneas para representar una transformación de traslación?
3. (10 pts) Mencione y explique las propiedades deseables en una familia de splines.

Ejercicios

1. (20 pts) Calcule las coordenadas *top, bottom, left,* y *right* de un frustum determinado por un ángulo α, coordenadas $near=-n$ y $far=-f$. Considere que el frustum es simétrico.
2. (20 pts) En una proyección ortográfica no hay efecto de perspectiva. En consecuencia, el volumen visible para una transformación de este tipo está determinado por un rectángulo en el plano $x-y$, así como las coordenadas $-near$ y $-far$ en la dirección $-z$. Determine la matriz de transformación para una proyección ortográfica.
3. (20 pts) Demuestre que para una curva de Bézier se tiene que:

   a) $B''(0)=6(P_1-2P_2+P_3)$

   b) $B''(1)=6(P_2-2P_3+P_4)$

4. (20 pts) Una curva de Hermite está especificada por la matriz de geometría $\boldsymbol{G_H}=[P_1 \quad P_4 \quad T_1 \quad T_4]$ y la matriz base $\boldsymbol{M_H}$. Por otra parte una curva de Bézier está especificada por la matriz de geometría $\boldsymbol{G_B}=[P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4]$ y la matriz base $\boldsymbol{M_B}$. Demuestre que si ambas curvas son equivalentes, entonces se tiene que:

$$\boldsymbol{G_B}=\boldsymbol{G_H}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

1) ~~Es cuando todos y cada uno de los componentes eran divididos entre la distancia que se encontraban respecto a qué tan lejos o cerca se encontraban. Siendo así que al estar muy lejos se dividían entre un número muy grande, lo que producía que el vector se volviera más "pequeño"~~

$$\left(\frac{P_x}{P_w}, \frac{P_y}{P_w}, \frac{P_z}{P_w}, 1\right) \checkmark$$

5 pts

2) Porque sólo de esa manera lograbas tener varias transformaciones al mismo tiempo sin que el cálculo de estas se volviera muy complejo, de esa forma, en lugar de:

$$P' = MP + T$$
$$P'' = M(MP+T) \leftarrow$$ se vuelve muy largo

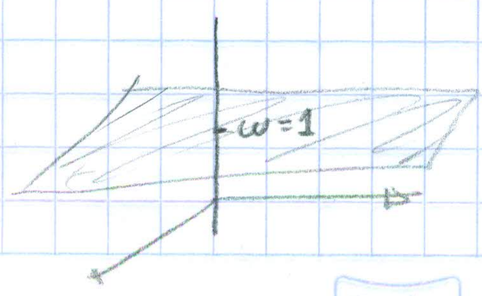
se podía con una sola matriz:

5 pts

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & T_x \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & T_y \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz es más fácil

además sólo se muestran aquellas cosas que se encuentran en el plano $w=1$



(3)

Existen 4 propiedades

(1) Composición simple: Todos los segmentos son dadas por una ecuación de orden 3

(2) Interpolar: Se garantiza de que la curva pasa por todos los puntos de control

(3) Continuidad paramétrica C2: Se garantiza una continuidad constante en el vector de aceleración (2da derivada)

(4) Control local: Al modificar un punto en la curva, sólo se modifican los segmentos vecinos a este.

10 pts

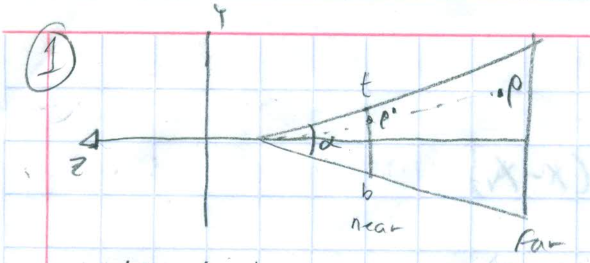
El Spline de Catmull Rom no cumple (3)

Los B-Spline no cumplen (2)

Los Spline cúbicos no cumplen (4)

Quinto Ranz Sebastián

(1)



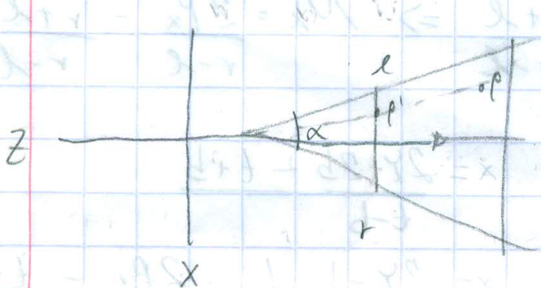
Considerar $m = \frac{W}{H}$

donde W es el ancho y H es la altura

$H = t - b$; $W = l - r$

$$\tan(\alpha/2) = \frac{H/2}{-n} = \frac{t-b}{-2n} \; ; \quad \tan(\alpha/2) = \frac{P_y}{-n} \Rightarrow P_y = -n\frac{(t-b)}{-2n}$$

$$P_y = \frac{t-b}{2}$$



20 pts

$$\tan(\alpha/2) = \frac{t}{-n} \Rightarrow \underline{t = -n\tan(\alpha/2)} \Rightarrow \underline{b = n\tan(\alpha/2)}$$

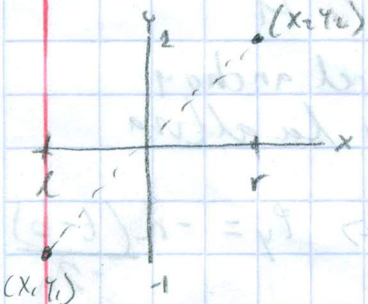
$$\tan(\alpha/2) = \frac{l}{-n} \Rightarrow \underline{l = -n\tan(\alpha/2)} \Rightarrow$$

$$\underline{t = -b \; ; \; l = -r}$$

$$\underline{r = n\tan(\alpha/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{l-r}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t-b}{2} \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Mapeando [l, r] a [-1, 1]



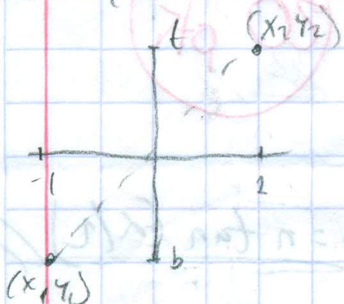
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{2}{r-l}(x - l)$$

$$y = \frac{2x - 2l}{r-l} - 1 = \frac{2x - 2l - r + l}{r-l} = \frac{2x - l - r}{r-l}$$

$$y = \frac{2x}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \Rightarrow N_x = \frac{2P_x}{r-l} - \frac{r+l}{r-l}$$

Mapeando [t, b] a [-1, 1]



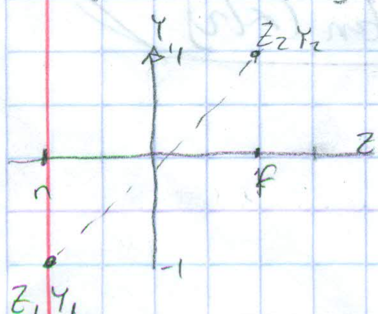
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad x = \frac{2y - 2b - t + b}{t-b}$$

$$y - b = \frac{t-b}{2}(x+1) \qquad x = \frac{2y - b - t}{t-b} = \frac{2P_y}{t-b} - \frac{t+b}{t-b}$$

$$\frac{2(y-b)}{t-b} - 1 = x \Rightarrow N_y = \frac{2P_y}{t-b} - \frac{t+b}{t-b}$$

20 pts

Mapeando [n, f] a [-1, 1]



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad y = \frac{2z - n - f}{f-n}$$

$$y + 1 = \frac{2}{f-n}(z - n) \qquad y = \frac{2P_z}{f-n} - \frac{f+n}{f-n}$$

$$y = \frac{2z - 2n - f + n}{f-n} \qquad N_z = \frac{2P_z}{f-n} - \frac{f+n}{f-n}$$

$$[N_x \; N_y \; N_z \; 1] = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$B(t) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

$$B''(t) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{4\times4} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6t \end{bmatrix}}_{4\times1} = G \underbrace{\begin{bmatrix} 6-6t \\ -12+18t \\ 6-18t \\ 6t \end{bmatrix}}_{4\times1}$$

a) Por demostrar $B''(0) = 6(P_1 - 2P_2 + P_3)$

$$B''(0) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 6-6(0) \\ -12+18(0) \\ 6-18(0) \\ 6(0) \end{bmatrix} = 6P_1 - 12P_2 + 6P_3 = 6(P_1 - 2P_2 + P_3) //$$

20 pts

b) Por demostrar $B''(1) = 6(P_2 - 2P_3 + P_4)$

$$B''(1) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 6-6(1) \\ -12+18(1) \\ 6-18(1) \\ 6(1) \end{bmatrix} = 6P_2 - 12P_3 + 6P_4 = 6(P_2 - 2P_3 + P_4) //$$

(4)

$$H(t) = [P_1\ P_4\ T_1\ T_4]\ M_H\ [1\ t\ t^2\ t^3]^T$$

$$B(t) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4]\ M_B\ [1\ t\ t^2\ t^3]^T$$

$$B'(t) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ t & 0 \\ t^2 & 0 \\ t^3 & 0 \end{matrix}$$

$$B'(t) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} -3 + 6t - 3t^2 \\ 3 - 12t + 9t^2 \\ 6t - 9t^2 \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$B'(0) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -3P_1 + 3P_2 = 3(P_2 - P_1) = T_1\ (1)$$

$$B'(1) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = -3P_3 + 3P_4 = 3(P_4 - P_3) = T_4\ (2)$$

$$B(0) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P_1\ (3)$$

$$B(1) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P_4\ (4)$$

Suponiendo $G_B = G_H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] = [P_1\ P_4\ T_1\ T_4] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1\ P_2\ P_3\ P_4] = [P_1\ ,\ P_1 + \tfrac{1}{3}T_1\ ,\ P_4 - \tfrac{1}{3}T_4\ ,\ P_4]$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} P_1 &= P_1 && (5) \\ P_2 &= P_1 + \tfrac{1}{3}T_1 && (6) \\ P_3 &= P_4 - \tfrac{1}{3}T_4 && (7) \\ P_4 &= P_4 && (8) \end{aligned}$$

20 pts

de (6) podemos ver $T_1 = 3(P_2 - P_1) \Rightarrow (1) = (6)$

de (7) podemos ver $T_4 = 3(P_4 - P_3) \Rightarrow (2) = (7)$

luego $(3) = (5)$ y $(4) = (8)$

$\Rightarrow$ Si ambas curvas son equivalentes, $\Rightarrow$

$$G_B = G_H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$